Autour du Théorème de Thalès

variations sur les liens entre le géométrique et le numérique

RUDOLF BKOUCHE

Le géométrique et le numérique

Le géométrique rencontre constamment le numérique, d'abord avec la théorie de la mesure des grandeurs, ensuite avec la mise en place de la méthode des coordonnées (la géométrie analytique), laquelle fait encore appel à la mesure comme le montre Descartes écrivant au début de la *Géométrie*

"Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites pour les construire."

Ce lien entre le géométrique et le numérique pose le problème de la définition des rapports de grandeurs. Sur le plan théorique, on peut alors, soit construire une théorie des proportions à la façon d'Eudoxe-Euclide, éliminant ainsi tout recours aux nombres autres que les entiers, soit construire une théorie des nombres réels comme cela s'est fait au XIX^e siècle avec Dedekind, Cantor, Weïerstrass et Méray; sur le plan du calcul pratique, on peut recourir à des procédés d'approximation, ce qui pose la question de leur légitimation.

Les constructions théoriques rappelées ci-dessus ainsi que les justifications des procédés d'approximation ne sauraient être enseignées à un niveau élémentaire bien que les problèmes posés ne puissent être évités; il y a ainsi une ambiguïté incontournable de l'enseignement et le problème se pose de savoir travailler dans cette ambiguïté. Une telle ambiguïté pose le problème de la rigueur sous une forme quelque peu paradoxale que l'on peut énoncer ainsi: d'une part la rigueur est nécessaire, d'autre part on ne peut expliciter les moyens de cette rigueur; il s'agit alors moins de mettre en place les conditions techniques de la rigueur que de mettre en évidence, à travers des raisonnements non nécessairement canoniques, la nécessité de la rigueur. Cela suppose, pour l'enseignant, à côté de de la maîtrise de la rigueur formelle qui structure le raisonnement mathématique, une rigueur de pensée sans laquelle l'enseignement risque de devenir informe; pour préciser ce qui vient d'être dit, disons que, si l'on ne peut donner, au collège ou même au lycée, une démonstration complète du théorème des lignes proportionnelles (appelé depuis la fin du siècle dernier le théorème de Thalès), on ne peut éviter de poser la question des rapports incommensurables et de leur prise en compte.

Cette relation géométrique-numérique conduit à poser de façon plus générale le problème de l'algébrisation de la géométrie (la géométrie analytique à la fois du point de vue du calcul numérique et du point de vue du calcul littéral), de même que le problème des cas de figures et de leur élimination. Il nous semble clair que, dans ces problèmes, l'aspect historique apporte des éléments de réflexion comme le montre, par exemple, la lecture des grands traités de géométrie élémentaire.

Nous abordons dans cet article le seul point de vue de la mesure des grandeurs, renvoyant à un article ultérieur pour une étude générale de la place du numérique dans la construction de la géométrie.

Autour du théorème de Thalès

variations sur les liens entre le géométrique et le numérique

"La connaissance évoluée, la connaissance fine, se fonde sur la connaissance "naturelle" qui ne peut cependant être envisagée que comme une approche sommaire de la connaissance évoluée."[1]

Ferdinand Gonseth

Introduction

Le théorème de Thalès[2] (ou théorème des lignes proportionnelles) énonce des conditions de proportionnalité de segments; en cela il est au coeur de la relation entre géométrique et numérique, que ce soit à travers la mesure ou que ce soit avec la méthode des coordonnées et la géométrie analytique.

Commençons par rappeler le rôle de la proportionnalité dans la définition des figures semblables; cette définition marque la nature métrique de la notion de forme si l'on considère que la théorie de la similitude telle qu'elle se développe dans la géométrie élémentaire, exprime essentiellement que deux objets ont même forme[3]; ainsi Emile Borel dans un débat sur l'enseignement de la géométrie organisé par la Société Française de Philosophie à propos de la Réforme de 1902/1905, expliquait:

1 Gonseth [Go], p. 145

2 L'appellation "Théorème de Thalès" est récente; dans les ouvrages de géométrie élémentaire de langue française, elle apparaît seulement à la fin du XIX^e siècle, on peut citer le *Cours de Géométrie élémentaire* de Combette [Com] et quelques ouvrages du début du XX^e siècle comme ceux de Bourlet [Bourl] ou ceux de Vacquant et Macé de Lépinay [VM]. L'appellation devient officielle seulement dans les programmes de 1925; le grand traité de Hadamard [Ha] ne l'emploie pas qui parle du théorème des lignes proportionnelles. Quant à la part prise par Thalès dans la découverte de ce théorème, elle reste problématique et nous renvoyons aux pages consacrées à Thalès dans *La Géométrie Grecque* de Paul Tannery [TanP] et dans *Les Ecoles Présocratiques* édité par Jean-Paul Dumont [Dum]. Enriques, dans son article de l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques* [Enr], indique que le théorème des lignes proportionnelles est appelé par certains théoréme de Thalès tout en indiquant les réticences de Paul Tannery dans l'ouvrage cité ci-dessus. Pour l'histoire du théorème de Thalès et ses diverses formes dans les ouvrages de géométrie élémentaire, nous renvoyons à l'article de Henry Plane [Pl].

3 Bkouche [Bk1]

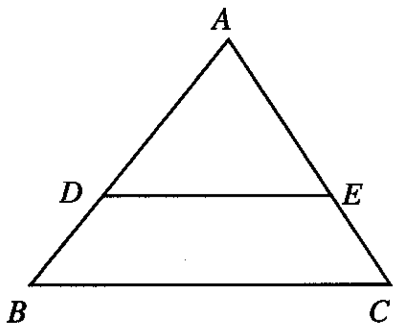
"Il convient dans l'enseignement élémentaire, de considérer la notion de similitude comme une notion première: c'est une notion des plus simples que chacun a sans faire de géométrie; il suffit d'avoir constaté que l'idée de forme est indépendante de l'idée de grandeur."[4]

Rappelons la définition des figures semblables telle que l'énonce Euclide

"Les figures rectilignes semblables sont celles qui ont les angles égaux chacun à chacun, et dont les côtés autour des angles égaux sont proportionnels."[5]

définition qui fait intervenir à la fois l'égalité des angles et les relations de proportionnalité entre côtés; la théorie des proportions permet de définir de façon précise cette notion de proportionnalité, le théorème de Thalès énonçant, quant à lui, un critère de proportionnalité géométrique.

Nous rappellerons d'abord les deux formes traditionnelles de ce théorème:
Premier énoncé. *"Si l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle, et si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les secteurs sera parallèle au côté restant du triangle."*[6]



Autrement dit, si la droite **DE** est parallèle au côté **BC**, on a la relation:

AD/DB = AE/EC

et réciproquement. Euclide considère seulement le cas où les points **B** et **D** d'une part, **C** et **E** d'autre part sont du même côté par rapport à **A**.

---

4 "L'Enseignement de la Géométrie", débat publié dans le *Bulletin de la Société française de Philosophie*, tome VII, ,1907

5 Euclide, *Eléments*, Livre VI, définition 1, p. 139 Les citations des *Eléments* sont extraites de la traduction de Peyrard [Pe], la pagination est celle de l'édition de 1993.

6 ibid. Livre VI, proposition 2, p. 141

Second énoncé. *"Deux sécantes sont coupées en parties proportionnelles par des droites parallèles."* [7]

Ces deux énoncés (équivalents) correspondent à des approches géométriques différentes que nous développons ci-dessous, l'approche euclidienne d'une part, l'approche d'Arnauld d'autre part, laquelle se veut, selon les conceptions de son auteur, plus *naturelle* [8].

Mais peut-être plus important que la différence de forme des énoncés, faut-il mettre en avant d'une part la différence des démonstrations (cf. ci-dessous), d'autre part la différence de conception quant à la notion de mesure.

Euclide, pour répondre à la crise provoquée par la découverte des irrationnelles, développe une théorie des proportions s'appuyant sur la notion d'ordre éliminant tout recours au numérique (c'est la théorie d'Eudoxe exposée au Livre V des *Eléments*).

Arnauld, quant à lui, développe une notion d'approximation au statut mal défini, peut-être plus proche du calcul numérique, même s'il ne va pas jusqu'à identifier un rapport de longueur à un nombre. A la même époque, d'autres mathématiciens tels Stevin ou Descartes acceptaient une telle identification même si le statut des nombres ainsi introduits (les nombres *sourds* ou *irrationnels*) restait incertain.

Il faudra attendre le XIX^e siècle pour que le statut du numérique se précise avec la construction des nombres réels [9] permettant de redéfinir la relation entre le géométrique et le numérique. Cette relation se précisera avec l'insertion de la géométrie dans le cadre de l'algèbre linéaire.

Ainsi le théorème de Thalès assure la liaison entre la problématique de la similitude et la problématique de la mesure (telle qu'elle est définie par la théorie des proportions (cf. ci-dessous)). Cela explique le rôle joué par ce théorème dans le développement de la géométrie élémentaire; celle-ci étant essentiellement une théorie de la mesure des grandeurs géométriques, le théorème de Thalès permet de ramener l'étude de la forme des objets géométriques à des considérations de grandeur.

---

7 Hadamard [Ha], Livre III, chapitre I, p. 108

8 Nous verrons qu'elle est plus proche de la pratique de la mesure alors que la construction d'Eudoxe se présente comme indépendante de toute pratique, ce qu'elle est effectivement.

9 Dedekind [De], préface

Cet article est composé de trois parties.

La première partie est consacrée à une étude historique des diverses démonstrations du théorème de Thalès. Cette étude permettra de préciser comment se construit la relation entre le numérique et le géométrique.

La deuxième partie est consacrée aux implications du théorème de Thalès. Nous étudierons d'abord les propriétés liées à la similitude. Ensuite nous verrons comment le théorème de Thalès permet de fonder la géométrie analytique dans la mesure où celle-ci est liée à la notion de mesure. Enfin nous verrons comment le théorème de Thalès s'inscrit dans un cadre vectoriel et plus généralement dans le cadre de l'algèbre linéaire; on peut alors mettre en valeur le rôle du théorème de Thalès dans la *linéarisation* de la géométrie élémentaire.

Enfin *la troisième partie* aborde les problèmes d'enseignement. Ces problèmes sont d'autant plus difficile que les constructions théoriques qui définissent la relation entre le numérique et le géométrique ne sauraient être abordées dans un enseignement élémentaire (tel celui du collège, voire même du lycée) même si l'on rencontre très tôt des problèmes où géométrique et numérique se rencontrent; ainsi les problèmes de mesures et de calcul des grandeurs, ainsi les problèmes de proportionnalité géométrique liés à la similitude, ainsi aussi les problèmes de représentation analytique, etc. Apparaît ainsi une ambiguïté incontournable de l'enseignement dans la mesure où l'on est amené à travailler dans un certain *indéfini*, mais peut-être faut-il rappeler que ce sont les problèmes cités plus haut qui ont conduit à remplacer cet indéfini par des constructions précises. C'est essentiellement ce point que nous développerons dans la troisième partie de l'article.

PREMIÈRE PARTIE

LES DÉMONSTRATIONS DU THÉORÈME DE THALÈS

La démonstration euclidienne

1. *La méthode des aires*
2. *La théorie des proportions*
3. *La démonstration d'Euclide*

La démonstration d'Arnauld

1. *La critique de Port-Royal*
2. *La théorie des proportions*
3. *La théorie des parallèles*
4. *Le théorème des lignes proportionnelles*
5. *Remarques comparatives sur les méthodes d'Euclide et d'Arnauld*

Legendre, le retour à l'ordre euclidien

1. *Sur quelques traités classiques*
2. *Les "Elémens de Géométrie" de Legendre*
3. *La méthode des aires*

Lacroix entre l'empirisme et Port-Royal

1. *Les "Elémens de Géométrie" de Lacroix*
2. *Les proportions*
3. *Les lignes proportionnelles*

La théorie des proportions à la lumière des nombres réels

1. *Sur quelques ouvrages de géométrie élémentaire*
2. *Constructions des nombres réels et mesures des grandeurs*
3. *Les grandeurs proportionnelles*
4. *La mesure des grandeurs et la proportionnalité dans quelques traités de géométrie*

La démonstration euclidienne

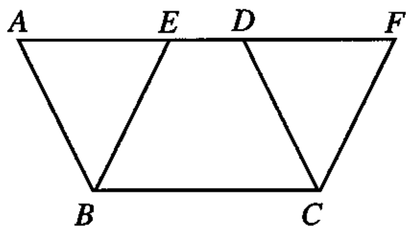
La démonstration euclidienne s'appuie d'une part sur la méthode des aires, d'autre part sur la théorie des proportions.

1. *La méthode des aires*

La méthode des aires, telle qu'elle est exposée dans le Livre I des *Eléments* énonce des critères d'égalité d'aires; on peut la considérer comme la légitimation du procédé empirique de découpage et de recomposition des aires qui permet d'affirmer que des surfaces sont égales. Elle est l'un des points forts de la méthode euclidienne que l'on retrouve tout au long des *Eléments* et plus généralement dans les travaux des géomètres grecs.

La méthode des aires s'appuie d'une part sur le postulat des parallèles (lequel permet de montrer l'égalité des angles alternes-internes ou des angles correspondants définis par une sécante coupant deux droites parallèles) et les cas d'égalité des triangles (qui légitiment l'opération de recomposition); ainsi la proposition 35 du Livre I :

> *"Les parallélogrammes, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux entre eux."*



En fait l'égalité des triangles *ABE* et *CDF* (les côtés *AB* et *BE* sont respectivement égaux aux côtés *DC* et *CF*, les angles *ABE* et *DCF* sont égaux) implique l'égalité des aires des parallélogrammes *ABCD* et *EBCF*; en effet le quadrilatère *ABCF* est composé du triangle *ABE* et du parallélogramme *BCFE*, il est aussi composé du triangle *CDF* et du parallélogramme *ABCD*.

De façon plus générale on peut énoncer (proposition 36 du Livre I) :

> *"Les parallélogrammes, construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles, sont égaux entre eux."*

On passe aux triangles en remarquant qu'un triangle est la moitié d'un parallélogramme (proposition 34 du Livre I), remarque évidente mais qu'Euclide démontre en utilisant l'égalité des angles alternes-internes et les cas d'égalité des triangles; on peut alors énoncer les deux propositions suivantes (propositions 37 et 38 du livre I):

> *"Des triangles, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux."*

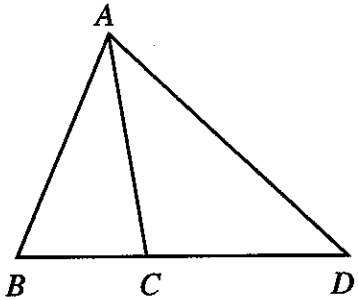
> *"Des triangles, construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles, sont égaux."*

On remarquera les deux sens du terme *égalité*, égalité des aires et égalité au sens de la superposition; le sens est déterminé par le contexte[10].

Si, dans un premier temps, la méthode des aires permet d'affirmer l'égalité de deux surfaces, le problème de la mesure des aires est de comparer deux aires, d'exprimer leur rapport, c'est-à-dire combien de fois chacune des aires contient une partie aliquote commune (c'est-à-dire une partie contenue un nombre entier de fois dans chacune d'elles).

On peut alors énoncer (proposition 1 du Livre VI)

> *"Les triangles et les parallélogrammes qui ont la même hauteur sont entre eux comme leurs bases."*



autrement dit, on a la relation

$$\frac{\text{aire } ABC}{\text{aire } ACD} = \frac{BC}{CD}$$

---

10 En fait, la superposition doit être entendue comme un critère d'égalité, l'égalité étant l'égalité de grandeur, ce que laisse supposer les énoncés des *"notions communes"*. Notons cependant que, en ce qui concerne les longueurs et les angles, l'égalité est équivalente à la superposition comme on le voit dans la démonstration de la proposition 4 du Livre I (le deuxième cas d'égalité des triangles).

Cela suppose d'avoir défini de façon précise sinon le rapport de deux grandeurs (ici des aires ou des longueurs) du moins l'égalité de ces rapports. Lorsque les grandeurs sont commensurables (c'est-à-dire, ont une partie aliquote commune), le rapport se définit comme on l'a dit ci-dessus. De façon précise, soit λ une partie aliquote commune de BC et CD, alors $BC = m\lambda$, $CD = n\lambda$, m et n étant des nombres entiers; on peut alors considérer une division de BC et CD en parties de longueur λ, la proposition 38 du Livre I montre alors que les triangles de sommet A et de base une partie de longueur λ ont même aire, soit σ l'aire d'un tel triangle, alors

$$\text{aire } ABC = m\sigma$$
$$\text{aire } ACD = n\sigma$$

ce qui prouve l'assertion.

Ce raisonnement n'est plus valide si BC et CD sont incommensurables (c'est-à-dire, n'ont pas de partie aliquote commune), il devient alors nécessaire d'expliciter une théorie des proportions (c'est-à-dire de l'égalité des rapports) pour des grandeurs incommensurables.

2. *La théorie des proportions.*

Tant que les géomètres grecs ne connaissaient que des rapports de grandeurs commensurables, la théorie des proportions n'était qu'un simple chapitre de l'arithmétique, le rapport de deux grandeurs étant défini comme rapport d'entiers. La découverte (via le théorème de Pythagore) des grandeurs incommensurables posait un nouveau problème et il devenait nécessaire d'élaborer une théorie des proportions prenant en compte l'incommensurabilité[11].

La théorie des proportions fut développée par Eudoxe, mathématicien contemporain de Platon, elle est exposée au Livre V des Eléments d'Euclide auquel nous renvoyons, une partie de ce livre est exposée et commentée dans *Mathématiques au fil des âges*[12]; nous renvoyons aussi à l'article d'Eliane Cousquer sur l'histoire des nombres[13].

Nous rappelons ici les définitions euclidiennes nécessaires à la compréhension de la suite de l'exposé :

---

11 Pour une étude historique de l'incommensurabilité, nous renvoyons aux ouvrages de Knorr [Kn] et de Caveing [Ca] ainsi qu'aux nombreuses notes qui accompagnent l'édition anglaise des *Eléments* d'Euclide par Heath [He1]. On peut lire aussi le mémoire de DEA de Soussan [Sou].

12 *Mathématiques au Fil des Ages* [GIIE], p. 120-122

13 Eliane Cousquer [Co2]

3. *Une raison est une certaine manière d'être de deux grandeurs homogènes entre elles, suivant la quantité.*
4. *Une proportion est une identité de raison.*
5. *Des grandeurs sont dites avoir une raison entre elles, lorsque ces grandeurs étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement.*
6. *Des grandeurs sont dites être de même raison, la première à la seconde et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième, à d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième, sont tels que les premiers équimultiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équimultiples, ou leurs sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois.*

En fait Euclide ne définit pas la raison (le rapport) de deux grandeurs homogènes, il explique dans la définition 5 que si deux grandeurs ont une raison entre elles, il existe un multiple de chacune d'elles qui surpasse l'autre, ce qui précise la définition 3.

La définition importante est la définition 6 qui explicite ce qu'on entend par proportion. En termes d'aujourd'hui on pourrait écrire :

a et b étant deux grandeurs homogènes, c et d étant deux autres grandeurs homogènes, alors

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

si, n et m étant deux nombres entiers, les assertions suivantes sont vérifiées:

si $ma > nb$, alors $mc > nd$,
si $ma = nb$, alors $mc = nd$,
si $ma < nb$, alors $mc < nd$.

Pour l'étude des propriétés des proportions, nous renvoyons aux ouvrages cités ; le lecteur peut, à titre d'exercice, montrer les propriétés suivantes :

i) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ implique $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

ii) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ implique $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ et $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

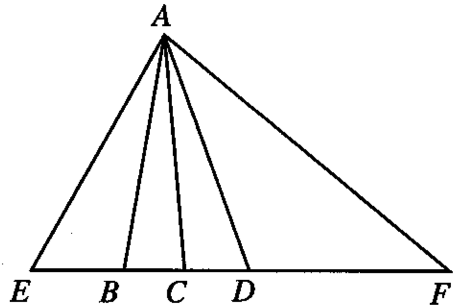
iii) si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, alors $a > b$ implique $c > d$ (resp. $a < b$ implique $c < d$, resp. $a = b$ implique $c = d$)

iv) si a, b, c, d sont des grandeurs homogènes, alors $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ implique $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

Remarque : Le rapport de deux grandeurs n'est pas un nombre (sauf si la première est un multiple de la seconde) ni même un rapport de nombres (sauf si les grandeurs sont commensurables) ; la théorie d'Eudoxe-Euclide élimine ainsi le numérique. Notons que dans les calculs pratiques, les géométres grecs savaient approcher les rapports de grandeurs par des rapports de nombres (les fractions d'aujourd'hui), un exemple est donné par le calcul approché de p par Archimède[14] ou les calculs d'aires et de volumes par Héron d'Alexandrie[15].

3. *La démonstration*

Nous allons voir comment la notion d'égalité de raison permet de montrer la proposition 1 du Livre VI.



Soient m et n deux nombres entiers et soient les points E et F sur la droite CD tels que

$$CE = m\,CB$$
$$CF = n\,CD$$

la proposition 38 du Livre I implique

$$\text{aire } ACE = m \text{ aire } ACB$$
$$\text{aire } ACF = n \text{ aire } ACD$$

On montre aisément que si CE est plus grand que, égal à, ou plus petit que CF, alors l'aire du triangle ACE est plus grande que, égale à, ou plus petite que l'aire du triangle ACF ; autrement dit

$$m\,CB > n\,CD \text{ implique } m \text{ aire } ACB > n \text{ aire } ACD$$
$$m\,CB = n\,CD \text{ implique } m \text{ aire } ACB = n \text{ aire } ACD$$
$$m\,CB < n\,CD \text{ implique } m \text{ aire } ACB < n \text{ aire } ACD$$

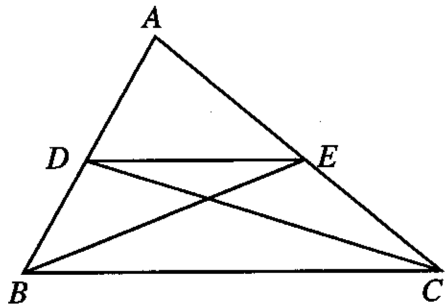
14 Archimède [Arc], p. 140-143

15 Heath [He2], vol. 2, p. 320-343

donc la raison de BC à CD est la même que celle du triangle ABC au triangle ACD.

On peut alors montrer le théorème de Thalès (proposition 2 du Livre VI) :

> *"Si l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle ; et si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle."*



On veut montrer l'égalité

$$\frac{BD}{DA} = \frac{CE}{EA}$$

On sait, d'après la proposition précédente, que

$$\frac{BD}{DA} = \frac{\text{aire } EBD}{\text{aire } EDA}$$

$$\frac{CE}{CA} = \frac{\text{aire } DCE}{\text{aire } DAE}$$

d'autre part, les triangles BED et CED ayant même base et compris entre les mêmes parallèles sont égaux, d'où la proposition.

On laisse au lecteur le plaisir de démontrer la réciproque.

La démonstration d'Arnauld

1. *La critique de Port-Royal*

La démonstration euclidienne ne veut laisser aucun point obscur dans la démonstration, c'est-à-dire que les principes ayant été énoncés (définitions, postulats, axiomes), les propositions s'enchaînent logiquement sans faire appel à des références extérieures à ces principes et aux règles de la logique (ce qui n'exclut pas l'usage de l'intuition géométrique, c'est-à-dire d'une appréhension globale des objets que l'on étudie).

Ainsi, le postulat des parallèles une fois énoncé, Euclide peut montrer l'égalité des angles correspondants et des angles alternes-internes définis par une sécante coupant deux droites parallèles, de même le principe de l'égalité par superposition permet de montrer les cas d'égalité des triangles; on a ainsi les ingrédients nécessaires à la mise en place de la méthode des aires. La théorie des proportions d'Eudoxe permet alors de démontrer la proposition 1 du Livre VI et d'en déduire le théorème de Thalès.

Si la rigueur de l'enchaînement des raisonnements conduit à la certitude, la démonstration elle-même n'explique pas les raisons de la propriété démontrée, on comprend qu'elle est non seulement vraie mais aussi nécessairement vraie (elle ne peut pas ne pas être vraie), on ne comprend pas pourquoi elle est vraie. C'est la critique que feront les philosophes de Port-Royal à la démonstration euclidienne, critique que Antoine Arnauld et Pierre Nicole vont développer dans *La Logique de Port-Royal* en énumérant les défauts de la méthode des géométres (c'est-à-dire des géomètres grecs et de leurs successeurs), parmi lesquels nous citerons[16]:

> *"Avoir plus le soin de la certitude que de l'évidence, et de convaincre l'esprit plus que de l'éclairer."*
>
> *"Prouver des choses qui n'ont pas besoin de preuves."*
>
> *"Démonstration par l'impossible."*[17]
>
> *"Démontrer par des voies trop éloignées."*
>
> *"N'avoir aucun soin du vrai ordre de la nature."*

Cette derniére critique est un point essentiel de la philosophie de Port-Royal, la recherche du *vrai ordre de la nature* auquel s'identifierait un ordre

---

16 Arnauld, Nicole [AN], quatrième partie, chapitre IX; pour une analyse de la critique de Port-Royal, cf. Barbin [Ba].

17 Il s'agit de la démonstration par l'absurde; nous verrons cependant que Arnauld ne peut s'en passer dans ses *Nouveaux Eléments de Géométrie*.

naturel de la connaissance, ce qu'Arnauld exprime au début de ses *Nouveaux Eléments de Géométrie* :

> *"Toutes les sciences supposent des connaissances naturelles, et elles ne consistent proprement qu'à étendre plus loin ce que nous connaissons naturellement."*[18]

Cette recherche d'un ordre naturel explique la position critique de Port-Royal envers la méthode euclidienne; si la science se construit sur ce que nous savons naturellement, ce savoir naturel n'a, quant à lui, pas besoin d'être prouvé, ce que Pascal expliquait déjà dans la première des règles de la démonstration qu'il énonçait dans son opuscule *De l'Esprit géométrique et de l'Art de persuader*:

> *"N'entreprendre de démontrer aucune des choses qui sont tellement évidentes d'elles-mêmes qu'on ait rien de plus clair pour les prouver."*[19]

Le rôle de la démonstration n'est plus alors seulement de convaincre par un discours logiquement parfait.

> *"Il ne suffit pas pour avoir une parfaite science de quelque vérité, d'être convaincu que cela est vrai, si de plus on ne pénètre par des raisons prises de la nature de la chose même pourquoi cela est vrai."*[20]

écrivent Arnauld et Nicole, précisant que c'est la seule façon de satisfaire l'esprit.

C'est en cela que les démonstrations par des voies trop éloignées ne sauraient être satisfaisantes; en effet, introduisant, pour des raisons liées à l'ordre logique du discours, des notions qui peuvent être étrangères à la nature même des objets sur lesquels portent ces démonstrations, elles occultent les *vraies raisons* de la vérité des assertions démontrées.

Parmi ces entorses au vrai ordre de la nature, Arnauld et Nicole citeront la place de la théorie des proportions au milieu d'un exposé de géométrie plane (livres I à IV et livre VI) et l'usage des aires pour montrer des propriétés de lignes. C'est évidemment la place accordée à la méthode des aires qui est critiquée, en particulier, en ce qui nous concerne, le détour par les aires pour montrer que des lignes sont proportionnelles.

L'ouvrage d'Arnauld, publié en 1667, se propose alors de mettre *un ordre naturel* dans l'exposé de la géométrie, ce que l'auteur explique dans sa

---

18 Arnauld [Arn1], livre I.

19 Pascal[Pa], p. 357

préface :

> *"étant persuadé que c'est une chose fort avantageuse de s'accoutumer à réduire les pensées à un ordre naturel, cet ordre étant comme une lumière qui les éclairent les unes par les autres, il (l'auteur) a toujours quelques pensées de ce que les Eléments d'Euclide étaient tellement confus et brouillés, que bien loin de donner à l'esprit l'idée et le goût du véritable ordre, ils ne pouvaient au contraire que l'accoutumer au désordre et à la confusion."*[21]

et, revenant sur le vrai ordre qu'il se propose d'introduire dans son ouvrage, Arnauld précise :

> *"Il (l'auteur) ajoutait même que cet ordre ne servait pas seulement à faciliter l'intelligence et à soulager la mémoire, mais qu'il donnait lieu de trouver des principes plus féconds et des démonstrations plus nettes que celles dont on se sert d'ordinaire... démonstrations toutes nouvelles, qui naissent d'elles-mêmes des principes qui y sont établis..."*

Notre propos n'est pas d'analyser l'ouvrage d'Arnauld et l'ordre de son développement mais d'expliciter à travers l'étude du théorème de Thalès, le principe de la méthode et de la comparer à celle d'Euclide. Nous avons dit ailleurs l'influence des idées de Port-Royal dans le développement de l'enseignement de la géométrie en France[22], nous verrons ici comment cette influence s'est manifestée à propos du théorème des lignes proportionnelles.

2. *La théorie des proportions*

A l'époque où Arnauld écrit son ouvrage, la notion de nombre s'est élargie, même si les nombres *sourds*[23] qui représentent les rapports de grandeurs incommensurables n'ont pas un statut théorique bien défini. On sait cependant effectuer les opérations arithmétiques sur les raisons (qu'elles soient de nombre à nombre, c'est-à-dire des raisons de grandeurs commensurables, ou qu'elles soient sourdes, c'est-à-dire des raisons de grandeurs incommensurables) et en calculer des approximations ; on sait aussi, une longueur étant donnée, construire une seconde longueur ayant une raison donnée (de nombre à nombre ou sourde) avec la première. Cela conduira Stevin à identifier nombres et raisons et ainsi énoncer une notion *unifiée* de nombre même

---

21 Arnauld [Arn1], préface.

22 Bkouche [Bk2]

23 Le terme sourd signifie *"que la raison n'entend pas"*, autrement dit *inaccessible à la raison*; cette expression est d'origine arabe.

s'il n'en définit pas le statut[24]. Ce *coup de force* ne sera pas accepté sans réserve et l'on verra les auteurs se partager entre ceux qui acceptent cette identification (ainsi Descartes dans sa *Géométrie* de 1637) et ceux qui, plus prudents, continuent à distinguer raisons et nombres.[25]

Notre propos n'est pas de faire un historique de la notion de nombre (nous renvoyons aux ouvrages de Jean Dhombres et Eliane Cousquer cités dans la bibliographie); nous dirons seulement que s'est mise en place une arithmétique qui unifie les opérations sur les nombres et les opérations sur les grandeurs, même si elle distingue nombres et grandeurs[26].

C'est sur une telle arithmétique qu'Arnauld va fonder la théorie des proportions. C'est ainsi que son ouvrage commence par quatre livres consacrés à cette arithmétique.

Après avoir expliqué, dans un premier livre, les opérations arithmétiques sur les nombres et les grandeurs, Arnauld étudie au livre II la théorie des proportions[27] :

L'auteur commence par définir la raison comme la manière dont une grandeur (l'antécédent) est contenue dans, ou contient, une autre (le conséquent), distinguant deux sortes de raisons :

> *"L'une est quand la grandeur ou quelqu'une de ses aliquotes est contenue tant de fois précisément dans une autre."*

ce qu'il appelle *"raison exacte"* ou *"raison de nombre à nombre"*, puisque dans ce cas la raison peut s'exprimer comme raison d'un nombre entier à un autre.

> *"L'autre manière selon laquelle une grandeur est contenue dans une autre, est quand il ne se trouve aucune aliquote dans l'une qui soit précisément tant de fois dans l'autre."*

ce qu'on appelle une *"raison sourde"*.

---

24 Stevin, *Théorie des incommensurables grandeurs* (1585), cité dans*Mathématiques au Fil des Ages* [GIIE].

25 On peut lire à ce sujet l'article *"Nombres"* dans l'Encyclopédie (cf. *Encyclopédie Méthodique* [Enc], section Mathématiques, tome deuxième, p. 464 et sq.) ; nous renvoyons aussi à l'article cité d'Eliane Cousquer [Cou2]

26 Il faudrait citer les travaux de Viète qui, distinguant le calcul numérique (calcul sur les nombres) et le calcul spécieux (calcul sur les grandeurs), les unifie via le calcul littéral.

27 Arnauld [Arn1], livre II.

Une proportion est alors une égalité de raison qu'Arnauld définit ainsi :

> *"Deux raisons sont appelées égales quand les antécédents contiennent également les conséquents, ou sont également contenus dans les conséquents."*

Si cette première définition donne une idée de ce qu'est une proportion, elle est insuffisante pour les raisons sourdes, ce qui amène Arnauld à donner une seconde définition :

> *"Deux raisons sont appelées égales quand toutes les aliquotes pareilles des antécédents sont chacune également contenues dans chaque conséquent."*

autrement dit, soient a, b, c, d quatre grandeurs, a et b homogènes, c et d homogènes, nous dirons que la raison de a à b est égale à la raison de c à d (a est à b comme c est à d, ce qu'Arnauld note $a.b :: c.d$)) si x et y étant deux mêmes parties aliquotes de a et c (c'est-à-dire telles que $a = mx$ et $c = my$, m étant un nombre entier) l'une des deux assertions est vérifiée :

i) si x est précisément tant de fois dans b, alors y est autant de fois dans d, auquel cas la raison de chaque antécédent à son conséquent est de nombre à nombre.

ii) si x n'est jamais précisément tant de fois dans b, mais toujours avec quelque résidu, alors y est autant de fois dans d mais avec quelque résidu, auquel cas la raison est sourde.

Arnauld remarque alors que, si aucune partie aliquote de a n'est contenue un nombre entier de fois dans b, il se pourrait que pour l'une d'entre elles, la partie aliquote de c correspondante soit contenue un nombre entier de fois dans d ; il montrera plus loin que cela est impossible. Nous proposons, à titre d'exercice, que le lecteur vérifie cette proposition qui prouve qu'une raison sourde ne peut être égale à une raison de nombre à nombre, assurant la cohérence de la théorie des proportions selon Arnauld.

Arnauld peut alors étudier les propriétés des proportions ce que nous ne ferons pas ici, renvoyant à l'ouvrage d'Arnauld. Toutefois nous proposons au lecteur, à titre d'exercice, de montrer, façon Arnauld, les propriétés suivantes[28] :

i) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ implique $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$,

ii) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ implique $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$,

28 ibid. p. 5 et 6

iii) si a, b, c, d sont des grandeurs homogènes, alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ implique $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Notons que Arnauld ne dit pas qu'une raison est un nombre.

Arnauld donnera une nouvelle formulation de la théorie des proportions dans les éditions ultérieures de son ouvrage[29], se proposant de rendre plus accessibles les deuxième et troisième livres (ceux consacrés à la théorie des proportions et au calcul des raisons).

La raison devient *"la quantité relative d'une grandeur comparée à une autre"*[30], ce qui, à défaut de clarifier le concept de raison, en souligne le caractère quantitatif par rapport à la *"manière"* de la première édition (laquelle n'est pas sans rappeler la définition 3 du Livre V des *Eléments* d'Euclide).

En précisant que la raison est une quantité, Arnauld exprime que l'on peut comparer les raisons :

> *"Comme la raison est une quantité, quoique relative, toutes les propriétés de la quantité lui conviennent; c'est pourquoi une raison est égale, ou plus grande, ou plus petite qu'une autre raison"*[31]

Arnauld distingue encore raison de nombre à nombre et raison sourde; si la raison de nombre à nombre est représentée par une *"fraction"* ou *"nombre rompu"*, la raison sourde *"ne peut être marquée par aucun nombre"*[32]

Arnauld énonce alors plusieurs axiomes sur les proportions qui vont lui permettre d'énoncer le théorème suivant :

> *"Deux raisons sont égales quand toutes les aliquotes communes pareilles de chaque antécédent sont également contenues dans son conséquent"*[33]

Ainsi Arnauld démontre ce qui lui servait de définition de l'égalité des raisons dans la première édition.

Le théorème est évident dans le cas des raisons de nombre à nombre.

Dans le cas des raisons sourdes, Arnauld utilise le fait que, des raisons étant des grandeurs, on peut les comparer. Il montre alors, en utilisant la

29 Une seconde édition sera publiée en 1683, puis corrigée en 1693 ; cette dernière est publiée dans le tome 42 des *Œuvres complètes* d'Arnaud.

30 Arnauld [Arn2], p. 39

31 ibid.

32 ibid.

33 ibid. p. 49.

classique double réduction à l'absurde (la méthode d'exhaustion des géomètres grecs[34]) que si les aliquotes pareilles des antécédents sont également contenues dans les antécédents, alors les raisons sont égales.

En effet, considérons les raisons $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ (notons que dans la troisième édition, Arnauld emploie la notation $\frac{a}{b}$ pour désigner la raison de a à b, a étant appelé le numérateur et b le dénominateur) telles que les aliquotes pareilles de a et c sont également contenues dans b et d; cela signifie que si α est une partie aliquote de a et γ la partie aliquote pareille de c, soit

$$a = n\alpha \qquad\qquad c = n\gamma$$

alors b contient un même nombre de fois α augmenté éventuellement d'un résidu plus petit que α et d contient le même nombre de fois γ augmenté éventuellement d'un résidu plus petit que γ, soit

$$b = p\alpha + \varepsilon \qquad\qquad \varepsilon < \alpha$$

$$d = p\gamma + \eta \qquad\qquad \eta < \gamma$$

Si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ ne sont pas égales, alors $\frac{a}{b}$ est supérieure ou inférieure à $\frac{c}{d}$.

Supposons $\frac{a}{b}$ supérieure à $\frac{c}{d}$, alors en augmentant le conséquent b, on diminue la raison $\frac{a}{b}$ jusqu'à la rendre égale à $\frac{c}{d}$ (le fait que $\frac{a}{b}$ diminue lorsque b augmente est une conséquence des axiomes énoncés par Arnauld[35]). On peut alors trouver z tel que $\frac{a}{b+z} = \frac{c}{d}$; si on prend une partie aliquote de a inférieure à z, on arrive à une contradiction comme le vérifiera aisément le lecteur. Ainsi $\frac{a}{b}$ ne peut être supérieur à $\frac{c}{d}$. Un raisonnement

34 Rappelons l'ambiguïté du terme *"exhaustion"* inventé par Grégoire de Saint-Vincent pour lequel il signifie *"l'épuisement"* d'une surface ou d'un volume par une somme infinie de surfaces polygonales ou de volumes polyédraux (cf. l'article de Jean-Pierre Le Goff [LeG] cité dans la bibliographie). En ce qui concerne les géomètres grecs, lorsqu'on parle de la méthode d'exhaustion, il s'agit de l'exhaustion des cas : deux grandeurs étant données, l'une d'elles est nécessairement supérieure ou égale à la seconde, si l'on montre que les deux premiers cas conduisent à une contradiction, alors l'égalité est vraie. La méthode d'exhaustion des Grecs participe ainsi du raisonnement par l'absurde.

analogue montre que $\frac{a}{b}$ ne peut être inférieur à $\frac{c}{d}$. On en conclut l'égalité des deux raisons.

Ici encore, Arnauld utilise le raisonnement par l'impossible. Ce caractère incontournable est lié à *"la divisibilité à l'infini"* comme le remarque Arnauld qui écrit :

> *"Or il est clair que tout ce qui tient de l'infini ne saurait être compris par un esprit fini tel que celui de l'homme."*[36]

Il s'ensuit que l'on ne peut avoir pour des raisons sourdes *"des notions aussi claires"* que pour les raisons de nombre à nombre ; Arnauld distingue ainsi les preuves négatives dans lesquelles intervient le raisonnement par l'absurde des preuves positives. Le terme *négatif* marque ici la limite de la compréhension humaine; on le retrouve dans la classique notion de *théologie négative,* laquelle se propose moins de dire ce que Dieu est que d'approcher la connaissance de Dieu en exprimant ce qu'il n'est pas.

Pour une étude plus complète de la théorie des proportions chez Arnauld et de la comparaison des éditions successives des *Nouveaux Elémens de Géométrie,* nous renvoyons à un article à paraître de Anne Chevalier[37].

3. *La théorie des parallèles*

Au livre VI de ses *Nouveaux Elémens de Géométrie,* Arnauld énonce deux manières de considérer des parallèles, l'une négative et l'autre positive :

> *"La négative est de ne se rencontrer jamais, quoi que prolongée à l'infini."*
>
> *"La positive, d'être toujours également distantes l'une de l'autre, ce qui consiste en ce que tous les points sont également distant de l'autre : c'est-à-dire que les perpendiculaires de chacun des points d'une ligne à l'autre, sont égales".*[38]

et l'auteur remarque que la notion négative est une conséquence de la notion positive.

Avec la définition dite positive, Arnauld admet implicitement qu'une ligne dont les points sont à une même distance d'une droite donnée est encore une droite, on sait aujourd'hui que cet énoncé est équivalent au postulat des parallèles. La définition positive permet à Arnauld d'énoncer que si deux

---

36 Arnauld [Arn2], troisième axiome p.46
37 ibid. p.97
38 Arnauld [Arn1], livre VI, p. 103-104

droites sont perpendiculaires à une droite donnée, alors toute perpendiculaire à l'une d'elles est perpendiculaire à la seconde (sixième lemme) et d'en déduire que ces deux droites sont parallèles (première proposition).

Par contre, pour montrer l'égalité des angles alternes-internes, Arnauld a besoin de la mesure des angles qu'il relie à la mesure des arcs de cercle, et ce n'est qu'au livre VIII qu'il énonce la propriété suivante :

> *"Toute oblique entre deux parallèles fait les angles alternes sur ces parallèles égaux, c'est-à-dire que l'aigu qui est d'une part est égal à l'aigu qui est de l'autre part, et par conséquent l'obtus à l'obtus."*[39]

Etant donnée l'importance de cette propriété, nous expliquons comment Arnauld la démontre.

Arnauld montre d'abord la possibilité de définir la mesure des arcs de cercle indépendamment du rayon, pour cela il énonce (huitième théorème du livre VII) :

> *"Quand plusieurs circonférences sont concentriques et que du centre on tire des lignes indéfinies, les arcs de toutes ces circonférences compris entre ces deux lignes sont en même raison à leurs circonférences."*

La démonstration repose sur la théorie des proportions précédemment définies.

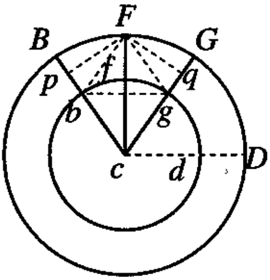
Notons d'abord que, dans un cercle ou dans deux cercles égaux, l'égalité des arcs soutenus par des cordes égales et l'égalité des cordes soutenant des arcs égaux (pourvu que ces arcs soient plus petits qu'un demi-cercle, sont posées en axiome (cinquième axiome du livre V), conséquence *"évidemment nécessaire de l'entière uniformité de la circonférence"*[40].

Arnauld définit alors le *sinus* d'un arc moindre que le quart de la circonférence comme la perpendiculaire menée de l'une des extrémités de l'arc sur le rayon qui passe par l'autre extrémité et remarque que le sinus n'est autre que la moitié de la corde sous-tendant le double de l'arc (notons que le sinus est une ligne), deux arcs égaux ont ainsi même sinus et réciproquement[41]. Arnauld peut alors démontrer le huitième théorème du livre VII.

La démonstration repose sur l'idée qu'une partie aliquote de l'arc de la grande circonférence définit une partie aliquote de l'arc de la petite circonfé-

---

39 ibid. livre VIII, p. 152
40 ibid.livre V, p. 86
41 ibid. livre VII, p. 126-127



rence et que la première partie aliquote est contenue dans la grande circonférence, avec peut-être un résidu, autant de fois que la seconde partie aliquote est contenue dans la petite circonférence[42].

On veut montrer que les arcs *BD* et *bd* sont entre eux comme les circonférences qui les portent.

Soit *X* une partie aliquote de *BD*, et *BF* égal à cette aliquote, alors *bf* est la même aliquote de *bd* ; pour le prouver, Arnauld construit l'arc *FG* égal à l'arc *BF* et montre que les arcs *bf* et *fg* sont égaux.

En effet les arcs égaux *BF, FG* ont même sinus, alors les droites *pb* et *qg* sont égales (cela résulte de ce que deux cordes égales sont équidistantes du centre, quatrième du livre VII) et par conséquent les droites *Fb* et *Fg* sont égales, la droite *Fc* est donc la perpendiculaire à *bg* passant par son milieu et coupe l'arc *bg* en son milieu (second théorème du livre VII), ainsi les arcs *bf* et *fg* sont égaux.

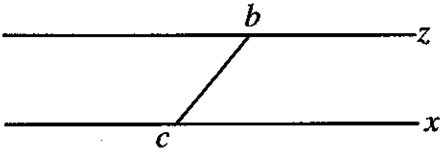
On laisse au lecteur le soin de terminer.

Le huitième théorème du livre VII permet alors de définir la mesure des arcs, la circonférence ou une partie déterminée de la circonférence étant prise pour unité[43].

L'angle étant défini, au début du livre VIII, comme une surface comprise entre deux lignes qui se joignent en un point du côté où elles s'approchent le plus, ce point étant le sommet de l'angle, Arnauld peut alors énoncer la relation usuelle entre angle et arc de cercle, relation qui permet de définir la mesure des angles à partir de la mesure des arcs[44]. En particulier on peut définir le *sinus* d'un angle, un rayon (c'est-à-dire la longueur des côtés) étant donnée. On peut alors énoncer la proposition suivante (premier corollaire du livre VIII)

> *"Toute oblique entre deux parallèles fait les angles alternes sur ces parallèles égaux, c'est-à-dire que l'aigu qui est d'une part est égal à l'aigu qui est de l'autre part, et par conséquent l'obtus à l'obtus."*

42 ibid. livre VII, p.128
43 ibid. livre VII, p. 129
44 ibid. livre VIII, p. 142-143



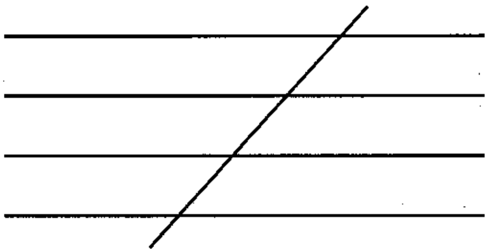
Pour le montrer, Arnauld remarque que, si l'on prend pour rayon la ligne *bc*, les sinus des angles alternes sont égaux.

Arnauld en déduit les deux corollaires (second et troisième corollaires):

> *"Les obliques égales entre les mêmes parallèles font des angles égaux (avec les parallèles)."*
>
> *"Les obliques entre parallèles qui font des angles égaux sont égales."*

ce qui implique (septième corollaire) :

> *"Plusieurs parallèles étant également distantes les unes des autres, c'est-à-dire la première de la deuxième, la deuxième de la troisième, la troisième de la quatrième..., si une même ligne les coupent toutes, toutes les portions de ces lignes comprises entre deux de ces parallèles sont égales."*



4. *Le théorème des lignes proportionnelles*

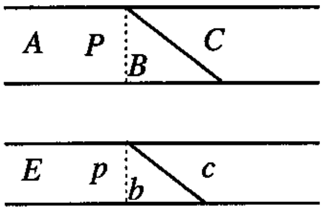
Au début du livre X consacré à l'étude des lignes proportionnelle, Arnauld introduit la notion d'espace parallèle, *"un espace compris d'une part entre deux droites parallèles et indéfini de l'autre"*[45].

Après avoir rappelé les résultats du livre VIII, Arnauld peut alors énoncer la proposition fondamentale :

---

45 ibid. livre X, p. 188

"Lorsque deux lignes sont également inclinées en deux différents espaces parallèles, elles sont entre elles comme les perpendiculaires de ces espaces, et leur éloignement de la perpendiculaire sont aussi en même raison."[46]



Soient les deux espaces A et E, on notera P et p les perpendiculaires respectives dans l'espace A et dans l'espace E, de même C et c les obliques respectives, B et b les éloignements respectifs. Alors P est à p comme C est à c et comme B est à b.

Divisons P en parties égales, x étant la partie aliquote de P ainsi définie, et menons par les points de division des parallèles aux droites définissant l'espace A, lesquelles rencontrent C qu'elles divisent en parties égales, soit y la partie aliquote de C ainsi définie ; par les points de division de C, on mène des parallèles à P, lesquelles rencontrent B qu'elles divisent en parties égales et on note z la partie aliquote de B ainsi obtenue ; il est clair que P contient autant de fois x que C contient y et que B contient z.

Cela fait, prenons x pour mesurer p de l'espace E, x est contenu un certain nombre de fois dans p avec peut-être un résidu moindre que x, alors en menant par les points de division des parallèles aux droites définissant l'espace E, on divise c en autant de parties égales avec peut-être un résidu, et en menant par les points de division de c des parallèles à p, on divise de même b en autant de parties égales avec peut-être un résidu ; ainsi par la définition des grandeurs proportionnelles, **P** est à p comme **C** est à c et comme ***B*** est à b, ce qui prouve la proposition fondamentale.

Arnauld énonce plusieurs conséquences parmi lesquelles les deux suivantes (premier et second corollaires)[47] :

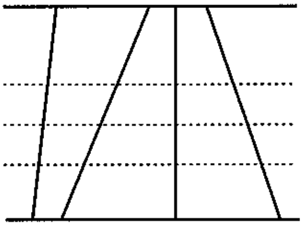
"Plusieurs lignes étant diversement inclinées dans le même espace parallèle, si elles sont toutes coupées par des parallèles à cet espa-

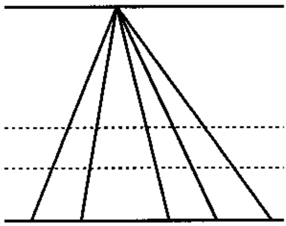
46 ibid. livre X, p. 190

47 ibid. livre X, p. 193-194

ce, elles le sont proportionnellement, c'est-à-dire que chaque toute est à chacune de ses parties, telle qu'est la première, ou la deuxième, ou la troisième... comme chaque autre toute à la même partie première, ou deuxième, ou troisième..."

"Si plusieurs lignes sont menées d'un même point sur une même ligne, elles sont coupées proportionnellement par toutes les lignes parallèles à celle qui les termine."





On comparera l'énoncé du premier corollaire du livre X avec celui du septième corollaire du livre VIII, cité ci-dessus.

5. *Remarques comparatives sur les méthodes d'Euclide et d'Arnauld*

Après la découverte des irrationnelles le numérique (les nombres entiers et les fractions d'entiers) devenait insuffisant pour construire une théorie de la mesure des grandeurs, la théorie des proportions d'Eudoxe-Euclide se proposait alors de définir la mesure à partir de la seule considération des grandeurs ; elle s'appuyait pour cela sur la notion d'ordre et la mesure des grandeurs se définissait comme comparaison de grandeurs indépendamment de toute détermination numérique ; en cela la théorie de la mesure se différenciait de la pratique de la mesure. D'une part, mesurer consiste essentiellement, la grandeur unité ayant été choisie, à associer un *nombre* à la grandeur que l'on mesure, savoir, le nombre de fois que la grandeur contient l'unité (ou une partie de l'unité) ; or la théorie d'Eudoxe élimine le numérique pour les raisons que nous avons dites, elle énonce des règles de comparaison de rapports, non une méthode de détermination de la *valeur* d'un rapport. D'autre part, la pratique de la mesure s'appuie sur la détermination de parties (au sens des sous multiples) de la grandeur que l'on mesure et de l'unité, alors que la théorie d'Eudoxe s'appuie sur des considérations d'équimultiples.

Nous avons signalé ci-dessus comment des méthodes de calcul approché pouvaient relier ces deux aspects de la mesure, mais sur le plan théorique, la mesure des grandeurs restait indépendante de toute représentation numérique et le restera tant qu'une construction appropriée ne sera pas mise en place, construction qui sera liée elle-même à la mesure des grandeurs, nous y reviendrons.

La problématique d'Arnauld nous semble, au contraire, beaucoup plus proche de la pratique de la mesure : une unité étant choisie, la mesure est définie par le nombre de fois que la grandeur contient l'unité, ou une partie de l'unité, avec peut-être un résidu, c'est la façon même dont Arnauld explicite le rapport de deux grandeurs homogènes lorsqu'il prend comme unité une partie aliquote de la première.

Ainsi deux points de vue apparaissent. Le premier propose une construction rigoureuse s'appuyant sur la notion d'ordre ; s'il élimine la difficulté posée par l'incommensurabilité, il s'écarte, pour les raisons que l'on a dites, de la pratique qu'il veut théoriser. Le second reste plus proche de la pratique de la mesure, contribuant ainsi à mettre en valeur la relation entre le numérique et le géométrique même s'il reste impuissant à définir ce lien de façon rigoureuse jusqu'à la construction des nombres réels.

C'est ce lien entre le géométrique et le numérique défini par la mesure qui conduisait Descartes, en 1637, à unifier les deux calculs, le numérique et le spécieux (le calcul sur le grandeurs), définis par Viète dans son *Introduction à l'Art analytique* [Vi].

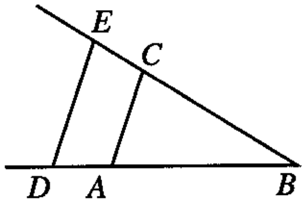
Descartes remarque d'abord, au début de sa *Géométrie* :

> *"Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites pour les construire."*[48]

Mettant alors en place ce calcul géométrique qu'est la méthode des coordonnées, Descartes remarque que les grandeurs géométriques qu'il considère peuvent être représentées par des nombres dès lors qu'on a choisi une unité de longueur ; le calcul géométrique, qui participe du calcul spécieux de Viète, devient ainsi un calcul numérique. Notons que Descartes ne pose pas le problème des irrationnelles, il lui semble évident qu'une unité étant choisie, toute longueur peut être représentée par un nombre et inversement tout nombre peut être représenté par une longueur. Descartes rejoint ainsi le point de vue de Stevin (cf. ci-dessus). Ce point de vue lui permet de représenter le produit de deux lignes par une autre ligne, comme il explique

48 Descartes [Des], p. 333

au début de son ouvrage, utilisant le théorème des lignes proportionnelles pour justifier sa construction[49].



Du point de vue géométrique, alors que les géomètres grecs vont chercher dans la méthode des aires les conditions de la rigueur, la notion d'aire, via une théorisation du découpage et de la recomposition des surfaces, devenant une notion première de la géométrie, Arnauld, conformément à sa recherche du *vrai ordre de la nature*, pose l'antériorité de la ligne par rapport à la surface; c'est cet ordre posé *a priori* qui l'amène à mettre en valeur, d'abord la définition positive des parallèles, ensuite la propriété qui énonce que des parallèles équidistantes découpent sur une sécante des segments égaux, propriété qu'il énonce deux fois, d'abord au livre VIII (septième corollaire), ensuite au livre X (huitième lemme), propriété qui énonce *la raison géométrique* du théorème des lignes proportionnelles, c'est elle en effet qui, une fois définie la théorie des proportions, guide la démonstration du théorème des lignes proportionnelles, respectant ainsi le *vrai ordre de la nature*.

Notons le détour par la mesure des angles que propose Arnauld pour démontrer l'égalité des angles alternes-internes ; les auteurs ultérieurs qui s'inspireront des méthodes d'Arnauld en donneront une démonstration plus simple s'appuyant sur les cas d'égalité des triangles, lesquels ne semblent pas avoir dans l'ouvrage d'Arnauld l'importante place qu'ils occupent dans l'oeuvre euclidienne ; cependant la démonstration de la proportionnalité des angles et des arcs proposée par Arnauld restera un point important des traités de géométrie élémentaire.

D'Alembert pourra ainsi affirmer :

> *"Les propositions fondamentales(de la géométrie) peuvent être réduites à deux : la mesure des angles et le principe de superposition."*[50]

49 ibid. p. 334

50 D'Alembert [Dal], *Essai*,p. 113 ; voir aussi l'article *"Géométrie"* dans l'Encyclopédie [En].